

Vergleich der impulsbasierten Dynamiksimulation mit der Lagrange-Faktoren-Methode

Bayer, Daniel
Am Fasanengarten 5
Universität Karlsruhe, Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
76128 Karlsruhe
Tel.: +49 (0) 0721/60 8 – 39 66
Fax: +49 (0) 0721/60 8 – 83 30
E-Mail: dbayer@ira.uka.de

Bender, Jan
Am Fasanengarten 5
Universität Karlsruhe, Institut für Betriebs- und Dialogsysteme
76128 Karlsruhe
Tel.: +49 (0) 0721/60 8 – 39 67
Fax: +49 (0) 0721/60 8 – 83 30
E-Mail: jbender@ira.uka.de

Abstract: Eine der am weitesten verbreiteten Methoden zur Simulation von mechanischen Starrkörpersystemen ist die Lagrange-Faktoren-Methode (LFM). Die impulsbasierte Dynamiksimulation ist ein neuer alternativer Ansatz zur Simulation solcher Systeme. Durch den direkten Vergleich werden in dieser Arbeit die Vor- und Nachteile der beiden Methoden aufgezeigt. Dazu wird neben einer Laufzeit- und Genauigkeitsmessung zusätzlich ein informeller Vergleich durchgeführt und die Ergebnisse diskutiert.

Stichworte: Vergleich, impulsbasierte Dynamiksimulation, Lagrange-Faktoren-Methode

1 Einleitung

Zur physikalischen Simulation mechanisch verbundener Starrkörper existieren unterschiedliche Ansätze. Seit dem Jahr 2000 wird vom Institut für Betriebs- und Dialogsysteme an der Universität Karlsruhe eine neue, impulsbasierte Dynamiksimulation entwickelt. Ziel dieser Arbeit ist, diese neue Methode mit der Methode der Lagrange-Faktoren zu vergleichen.

Dieser Vergleich soll die impulsbasierte Dynamiksimulation gegen andere Verfahren abgrenzen und neue Anwendungsfelder definieren.

2 Verwandte Arbeiten

2.1 Die Lagrange-Faktoren-Methode

Die Lagrange-Faktoren-Methode (LFM) zählt zu den klassischen Methoden und ist weit verbreitet (vgl. z.B. [BarzBarr1988] oder [BarWit2001]). Wie bei der impulsbasierten Dynamiksimulation werden Bedingungen in Form von impliziten Funktionen definiert. Allerdings unterstützt dieser Ansatz keine redundanten Zwangsbedingungen oder Bedingungen in Form von Ungleichungen, wie sie zur Kontaktauflösung benötigt werden. Eine Sonderbehandlung für diese Fälle wird in [Bar1994] vorgestellt.

Das Prinzip der LFM ist die explizite Berechnung von Zwangskräften die sicherstellen, dass die Bedingungen in Zukunft erfüllt sind. Dazu muss ein lineares Gleichungssystem (LGS) gelöst werden, was mit Standardmethoden eine Laufzeit von $O(n^3)$ benötigt. In [Bar1996] wurde gezeigt, wie durch die Ausnutzung bestimmter Eigenschaften dieser Matrix die Berechnung mit einem linearen Laufzeitverhalten durchgeführt werden kann. Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit als die Baraff-Methode bezeichnet und die normale Faktorisierung als Lagrange-Methode.

Ein Problem der LFM ist, dass Fehler nicht automatisch ausgeglichen werden. Deshalb kommt es zum numerischen Drift (vgl. Kapitel 4.3) und ein Stabilisierungsverfahren wird benötigt. Ein gängiges Verfahren, welches auch in dieser Arbeit untersucht wird, ist die so genannte Baumgarte-Stabilisierung (vgl. [Baum1972]).

2.2 Die impulsbasierte Dynamiksimulation

Das in [Schm2003] und [BeBaSchm2003] vorgestellte impulsbasierte Verfahren basiert nicht wie die LFM auf der expliziten Berechnung der Zwangskräfte, sondern auf der iterativen Berechnung von Korrekturimpulsen. Die Lösung der Bewegungsgleichungen erfolgt also nicht durch die numerische Berechnung eines Differentialgleichungssystems, sondern durch die iterative Annäherung an diese Lösung. Das Verfahren bricht ab wenn, der Fehler für alle Bedingungen unter einer eingestellten Toleranz liegt.

Dabei wird der gesamte Fehler von Iteration zu Iteration kleiner, die Lösung konvergiert zu der physikalisch korrekten Lösung. Dies wurde in [SchmBePrau2005] bewiesen. Das Verfahren lässt sich damit jederzeit mit einer Näherungslösung unterbrechen, falls neue Daten, z.B. für die Darstellung, benötigt werden.

Da das Verfahren immer nur eine Verbindung betrachtet kann die Korrektur einer Bedingung eine andere verletzen. Bei Systemen mit vielen verbundenen Körpern kann dies die Anzahl der benötigten Iterationen stark erhöhen. Diese Abhängigkeiten lassen sich allerdings auch direkt berücksichtigen, indem zur Berechnung der Korrekturimpulse ein lineares Gleichungssystem aufgestellt wird (vgl. [BeSchm2006b]). Dieses Verfahren zeichnet sich durch lineare Laufzeit aus und wird in dieser Arbeit als impulsbasiertes LGS-Verfahren bezeichnet. Das bei diesem

Verfahren zu lösende, dünnbesetzte LGS lässt sich wie bei der LFM durch eine spezielle Faktorisierung in linearer Zeit lösen. Dieses Vorgehen wurde in [Be2007] veröffentlicht.

3 Laufzeit- und Genauigkeitsvergleiche

In diesem Kapitel wird die LFM mit der impulsbasierten Dynamiksimulation bezüglich der Laufzeit und Genauigkeit anhand von Messungen verglichen. Dazu wurden beide Verfahren in der selben Simulationsumgebung integriert, sodass beide Methoden unter den gleichen Voraussetzungen getestet werden konnten.

3.1 Laufzeitvergleiche

Um den Rechenaufwand der beiden Verfahren zu vergleichen, wurden dieselben Simulationen über ein identisches Zeitintervall durchgeführt und die benötigte Rechenzeit gemessen.

Als zu vergleichende Szene wurde eine binäre Baumstruktur mit statischer Wurzel gewählt (vgl. Abb. 1). Bei einem solchem Modell lassen sich die Anzahl der Gelenke und Körper über die Tiefe bzw. die Anzahl der Ebenen des Baumes regeln. Dies ermöglicht eine, obere Abschätzung der Laufzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße durchzuführen.

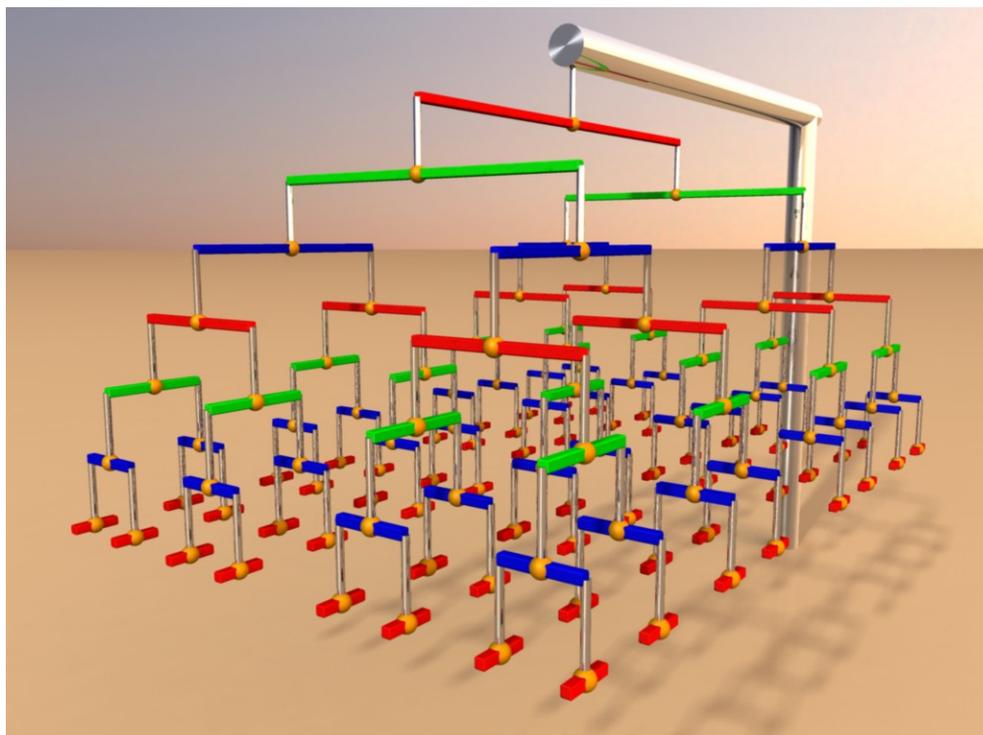


Abbildung 1: Binäre Baumstruktur aus Kugelgelenken und starren Körpern.

Gemessen wurden Simulationen mit Bäumen der Tiefe 5, 6, 7 und 8. Sowohl die impulsbasierten Verfahren sowie die LFM wurden mit dem vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren integriert (vgl. Kapitel 4.2). Für die Stabilisierungsparameter der Baumgarte-Stabilisierung (vgl. Kapitel 4.3)

wurden die Werte $\alpha = \beta = 30$ gewählt. Mit diesen Parametern ließen sich alle Simulation problemlos berechnen. Als Schrittweite wurde $h = 1/30s$ gewählt. Alle Messungen wurden auf einem Intel Pentium 4 mit 3.4 GHz durchgeführt. Da die Laufzeit der impulsbasierten Verfahren von der eingestellten Toleranz abhängt, wurden diese Verfahren mit unterschiedlichen Toleranzen gemessen. Die Abbildung 2 fasst die Ergebnisse zusammen.

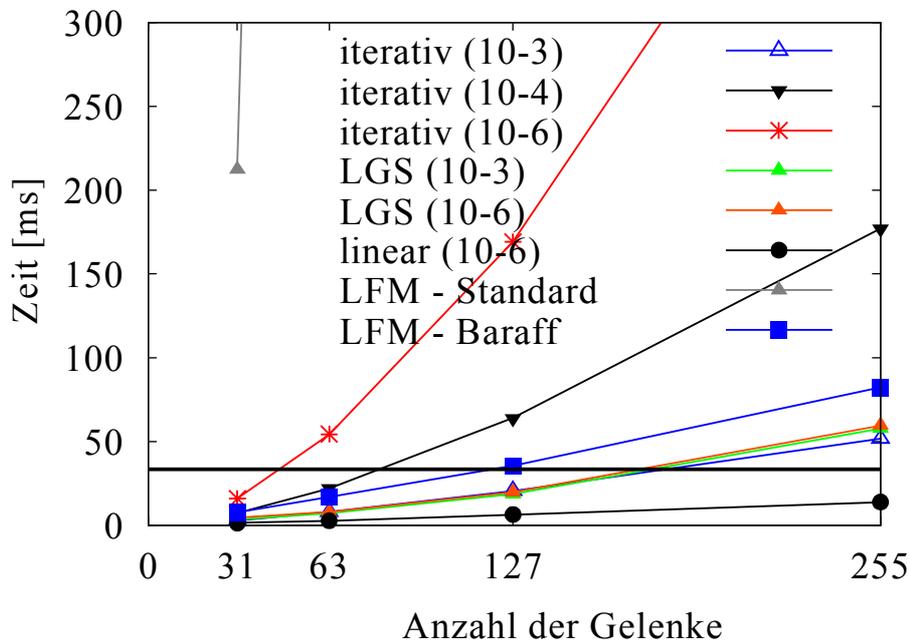


Abbildung 2: Laufzeitmessungen: durchschnittliche Rechenzeit pro Zeitschritt.

Die Messungen haben ergeben, dass die LFM ohne spezielle Faktorisierung die meiste Rechenzeit benötigt. Der Algorithmus von David Baraff profitiert von der Baumstruktur der Szene und kann die Berechnung in linearer Zeit durchführen. Mit diesem Verfahren konnte der Baum mit 63 Gelenken noch in Echtzeit berechnet werden.

Wie erwartet hängt die Laufzeit der iterativen Verfahren von der eingestellten Toleranz ab. Mit einer Genauigkeit von 10^{-6} konnte der Baum mit 31 Gelenken in Echtzeit simuliert werden, bei einer Toleranz von 10^{-3} auch der Baum mit 127 Gelenken. Bei dieser Genauigkeit konnten alle Modelle schneller als mit der Baraff-Methode berechnet werden.

Werden die Impulse mit einem LGS berechnet, werden Abhängigkeiten der Körper untereinander berücksichtigt. Dadurch hat die Toleranz keine große Wirkung auf die Laufzeit. Beide gemessenen Toleranzen benötigten beinahe dieselbe Rechenzeit und zwar annähernd soviel wie die iterative Methode mit der Toleranz von 10^{-3} .

Die lineare impulsbasierte Dynamiksimulation nutzt ebenso wie die Baraff-Methode die spezielle Struktur der Matrix und ermöglicht die Faktorisierung in linearer Zeit durchzuführen. Mit dieser Methode konnten alle Modelle in Echtzeit berechnet werden. Dabei ist sie annähernd sechs mal schneller als die Baraff-Methode.

3.2 Genauigkeitsvergleiche

Die Genauigkeit von Dynamiksimulatoren lässt sich schwer beurteilen. Dennoch kann die Genauigkeit unter unterschiedlichen Aspekten verglichen werden. Vergleiche bezüglich der Genauigkeit unterschiedlicher Simulationsverfahren wurden bereits in [SchmBe2005] durchgeführt. In dieser Arbeit werden anhand von Pendeln unter anderem Aspekte wie die Energiezunahme und die Schwingungszeit gemessen. Die Schwingungszeit lässt sich mit Methoden der klassischen Mechanik analytisch berechnen und kann so als absolutes Maß gelten.

In dieser Arbeit wurde als Messwert die Erfüllung der Zwangsbedingungen, also die gemittelten Lage- und Geschwindigkeitsfehler aller Gelenkpunkte nach einem Simulationsschritt gewählt. Diese Messung ist von besonderem Interesse, da sich der maximale Fehler bei der impulsbasierten Dynamiksimulation über die eingestellte Toleranz nach oben beschränken lässt. Allerdings beeinflusst dieser Parameter auch benötigte Rechenzeit (vgl. Abb. 2).

Bei der LFM hängt der Fehler nach dem Simulationsschritt maßgeblich vom Stabilisierungsverfahren ab, im Fall der hier eingesetzten Baumgarte-Stabilisierung von den Stabilisierungsparametern α und β .

Dass diese unter anderem (vgl. Kapitel 4.3) auch von der zu simulierenden Szene abhängen zeigt die Abb. 3. Diese Ergebnisse stammen aus derselben Messung bei der auch die Rechenzeit ermittelt wurde.

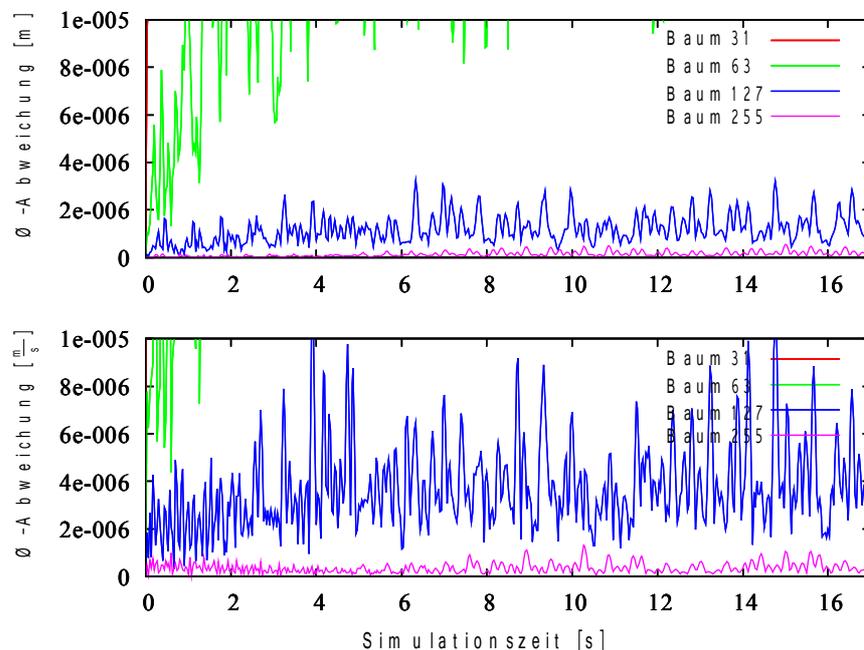


Abbildung 3: Durchschnittliche Verletzung bzgl. der Lage und Geschwindigkeit.

4 Informeller Vergleich

In diesem Kapitel folgt ein informeller Vergleich der beiden Verfahren. Dazu werden Probleme der einzelnen Verfahren untersucht, um so Aufschluss über die wesentlichen Unterschiede der beiden Methoden zu erhalten.

4.1 Singularitäten

Ein Problem der LFM stellen singuläre Matrizen dar, die invertiert werden müssen. Für das Entstehen einer solchen Matrix gibt es zwei wesentliche Ursachen (vgl. [Wag2001]).

Die eine Ursache sind die so genannten Koordinatensingularitäten. Diese treten auf, wenn die Ableitung einer Zwangsbedingung verschwindet, obwohl die Bedingung nicht erfüllt ist. Solche Konfigurationen resultieren in einer leeren Zeile in der Jacobi-Matrix. Dabei kann es sich durchaus um eine plausible Systemkonfigurationen handeln. Das Problem lässt sich meist vermeiden, indem man bei der Definition der Zwangsbedingungen die in [Glei1994] vorgestellten Regeln befolgt und das System nahe an der Erfüllung ist, d.h. die einzelnen Gelenkfehler nicht zu groß sind.

Die andere Ursache sind redundante oder widersprüchliche Zwangsbedingungen. Diese resultieren in einer linearen Abhängigkeit der Zeilen der Jacobi-Matrix untereinander. Dabei stellen widersprüchliche Bedingungen eine tatsächliche physikalische Unbestimmtheit dar, die eine explizite Lösungsstrategie erfordern. Dies gilt jedoch nicht für redundante Bedingungen, welche entstehen, wenn der Verbindungsgraph eines Systems Schleifen enthält. Die einfachste Art diesem Problem zu begegnen ist, diese Abhängigkeiten zu identifizieren und jeweils eine Bedingung zu deaktivieren. Andere Möglichkeiten sind die Nutzung der so genannten SVD-Faktorisierung (vgl. [PreTeVetFla1992]) oder die Implementierung einer Sonderbehandlung für Schleifen (vgl. [Bar1994]).

Bei der impulsbasierten Dynamiksimulation hingegen treten keine singulären Matrizen auf, denn alle während einer Iteration zu invertierenden Matrizen sind symmetrisch und positiv definit (vgl. [BeFiSchm2005]). Redundante Bedingungen werden ohne Sonderbehandlung unterstützt, widersprüchliche Bedingungen erfordern jedoch eine Spezialbehandlung, da das Verfahren sonst gar nicht oder erst bei der Höchstzahl an Iterationen stoppt.

4.2 Numerische Integration

Die LFM basiert auf der Berechnung von Zwangskräften, die die inneren Kräfte von Gelenken darstellen. Diese Zwangskräfte sind in der Regel kontinuierlich, d.h. sie verändern sich auch während des Zeitschrittes. Deshalb müssen die Zustände mit einem mehrstufigen Verfahren integriert werden.

Die impulsbasierte Methode berechnet anstatt innerer Zwangskräfte iterativ eine Serie von Impulsen. Dazu wird pro Iteration eine Vorschau auf die neue Gelenkposition ermittelt. Bei konstanten äußeren Kräften kann die Vorschau für den neuen Körperschwerpunkt exakt berechnet werden. Die Drehung (und auch im Falle kontinuierlicher äußerer Kräfte der Schwerpunkt) muss jedoch mit einem mehrstufigen Verfahren integriert werden.

4.3 Numerischer Drift und Stabilisierung

Während einer numerischen Berechnung treten in der Regel immer kleine Fehler auf. Wenn sich diese Fehler nicht ausgleichen, sondern ständig weiter wachsen, spricht man von einem numerischen Drift.

Bei der LFM entsteht dieser Drift durch die allgemeine Verträglichkeit der Differentialgleichung $\delta C/\delta t^2 = 0$ mit der Lösung $C = x + t v$. Das heißt jede mögliche Konfiguration von Lage x und Geschwindigkeit v sind zulässig. Um entstehende oder bereits vorhandene Fehler zu verringern wird deshalb ein Stabilisierungsverfahren benötigt.

Die folgenden Abschnitte befassen sich daher mit den speziellen Problemen der Baumgarte-Stabilisierung. Dieses Verfahren basiert auf einer gedämpften Schwingung und wird mit zwei Parametern α und β gesteuert. Dabei lassen sich wie bei gedämpften Schwingungen allgemein drei unterschiedliche Fälle der Annäherung an den Zielzustand unterscheiden:

- a) Kriechfall ($\alpha > \beta$): Es kommt zu einer stark gedämpften, langsamen Annäherung.
- b) Aperiodischer Grenzfall ($\alpha = \beta$): Es kommt zu einer kritisch gedämpften Annäherung ohne Vorzeichenwechsel.
- c) Oszillation ($\alpha < \beta$): Es kommt zu einer schwach gedämpften, schnellen Annäherung und einem Einschwingvorgang.

In der Regel wird der aperiodischer Grenzfall $\alpha = \beta$ gewählt. Dies führt zu einer möglichst schnellen Annäherung ohne Überschwingen welches vom Betrachter als physikalisch unplausibel bewertet wird.

Werden die Parameter bei bleibendem Verhältnis erhöht, führt das zu einer Steigerung der Schwingungsfrequenz und damit zu einer schnelleren Annäherung. Ist die Frequenz im Verhältnis zur Schrittweite jedoch zu groß, führt dies zu so genannten steifen Differentialgleichungen, die nur schwer numerisch auszuwerten sind. Zu niedrige Werte hingegen führen immer zu einer Annäherung nach a) und ggf. zu einer zu schwachen Stabilisierung, d.h. der numerische Drift wird nur abgemildert aber nicht verhindert.

Das Hauptproblem ist also die richtige Wahl der Stabilisierungsparameter α und β . Diese hängen neben der Schrittweite aber auch von der simulierten Szene und der gewählten Integrationsmethode ab (vgl. Kapitel 2.2 und [BreCamPetz1989]). Optimale Parameter lassen sich nicht automatisch bestimmen und müssen experimentell ermittelt werden (vgl. [AsQiRei1994]).

Zu welchem unterschiedlichem Verhalten die Wahl der Stabilisierungsparameter führt, veranschaulichen die Abbildungen 4 und 5. Für beide Abbildungen wurde ein Partikel gemessen, welches sich nur auf einer festen Kreisbahn mit Radius 1 bewegen darf. In Abb. 4 wurde dieses Partikel initial auf den Radius 2 gesetzt und ohne das Wirken äußerer Kräfte die Annäherung nach b) und c) untersucht. Die Abbildung zeigt also wie eine initial nicht erfüllte Zwangsbedingung ohne äußeren Einfluss durch die Baumgarte-Stabilisierung korrigiert wird.

In Abb. 5 sind die Zwangsbedingungen initial erfüllt und das Partikel wird einmalig durch eine äußere Kraft beschleunigt. Diese Messung wurde mit den Schrittweiten $h = 1/30s$ und $h = 1/100s$ durchgeführt. Außerdem zeigt diese Abbildung wie sich die Wahl der Stabilisierungsparameter auch auf die Energiebilanz des Systems auswirkt.

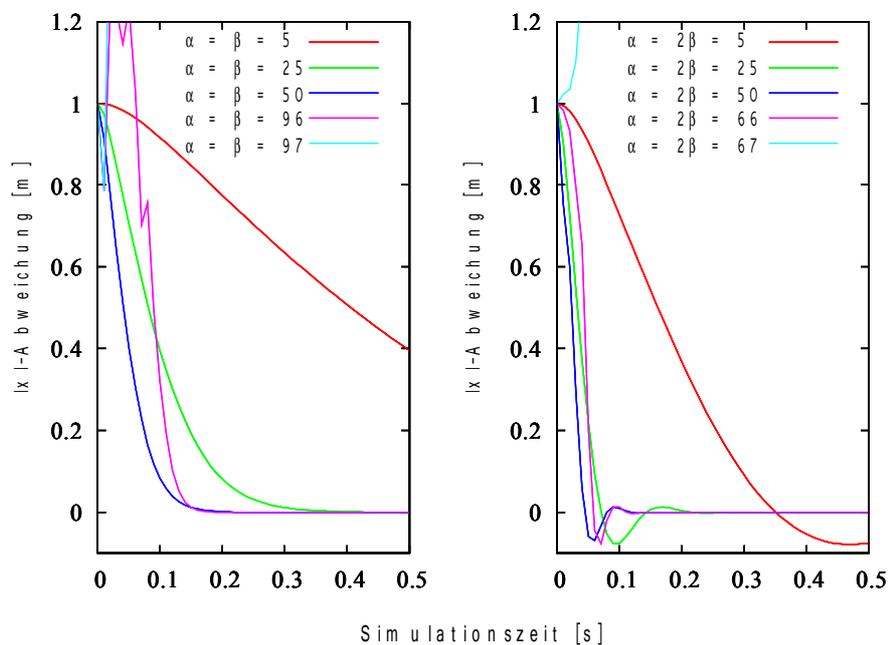


Abbildung 4: Korrektur nicht erfüllter Anfangsbedingungen durch die Baumgarte-Stabilisierung.

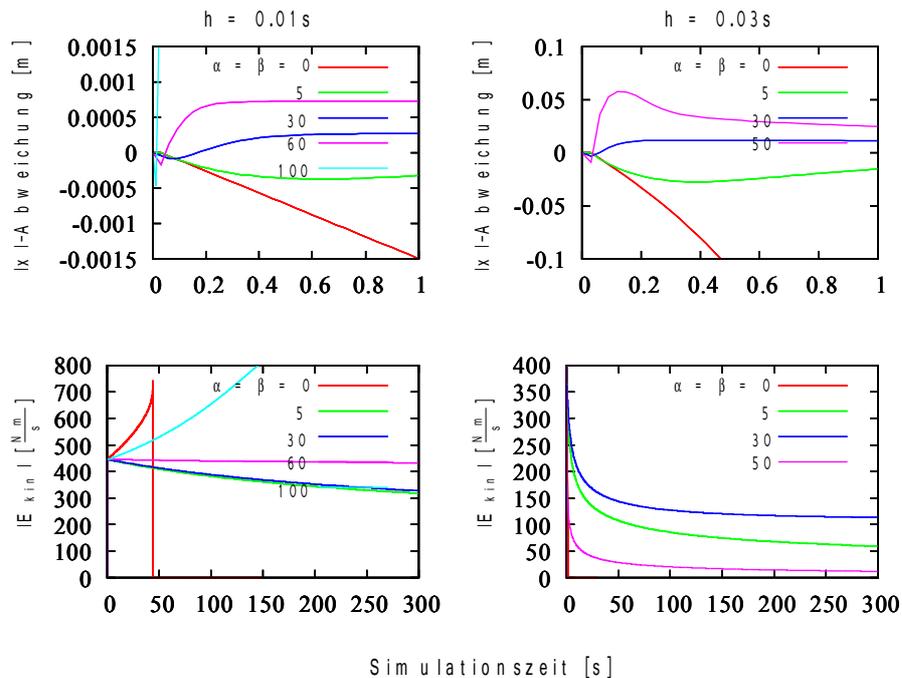


Abbildung 5: Auswirkung unterschiedlicher Schrittweiten und Stabilisierungsparameter auf die Simulation.

Die impulsbasierte Dynamiksimulation hingegen benötigt kein Stabilisierungsverfahren. Es kann kein numerischer Drift auftreten, denn das Verfahren stellt sicher, dass der Fehler nach jedem Zeitschritt unterhalb der eingestellten Toleranz ist. Es kommt also auch nicht zu Einschwingvorgängen oder zu einer langsamen Annäherung. Die schwierige Wahl der Stabilisierungsparameter entfällt. Vielmehr kann die impulsbasierte Dynamiksimulation selbst als Stabilisierungsverfahren für z.B. die LFM dienen (vgl. [SchmBe2005]).

4.4 Systemtopologie

Die LFM kann ohne Sonderbehandlung nur Szenen simulieren, deren Verbindungsgraph eine Baumstruktur hat. Redundante und widersprüchliche Bedingungen (vgl. 4.1), sowie Bedingungen in Form von Ungleichungen werden nicht ohne Sonderbehandlung unterstützt. Eine solche Methode wird in [Bar1994] vorgestellt.

Die impulsbasierte Dynamiksimulation unterstützt redundante Bedingungen und Bedingungen in Form von Ungleichungen ohne Sonderbehandlung (vgl. [BeSchm2006a]).

4.5 Weitere Unterschiede

- Die LFM berechnet explizit Zwangskräfte. Diese müssen bei der impulsbasierten Dynamiksimulation erst aus den berechneten Impulsen ermittelt werden.
- Das impulsbasierte Verfahren lässt sich jederzeit unterbrechen und liefert eine Näherungslösung. Dies gilt nicht für die LFM.
- Die Laufzeit der impulsbasierten Dynamiksimulation (d.h. die Anzahl der benötigten Iterationen) lässt sich nicht vorhersagen, die benötigte Laufzeit der LFM hingegen schon.

- Der maximale Gelenkfehler der mittels Baumgarte stabilisierten LFM lässt sich nicht vorhersagen. Bei der impulsbasierten Dynamiksimulation lässt sich dieser maximale Fehler als Parameter einstellen.
- Das impulsbasierte Verfahren hat im Vergleich zur LFM einen niedrigen Implementierungsaufwand.
- Bei der impulsbasierten Dynamiksimulation können Körperzustände, wie Lage und Geschwindigkeit, direkt verändert werden. Bei der LFM hingegen sollten aus Stabilitätsgründen die Anfangsbedingungen erfüllt sein und Körperzustände nur über Kräfte verändert werden.
- Bei der impulsbasierte Dynamiksimulation können Reibungskontakte mit dem Coulomb'sche Reibungsansatz berechnet werden (vgl. [BeSchm2006a]), was mit der LFM durch die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Normalenkraft nicht ohne weiteres möglich ist.

5 Ergebnisse

In der hier vorliegenden Arbeit wurden die LFM und die impulsbasierte Dynamiksimulation unter unterschiedlichen Aspekten verglichen. Diese Analysen haben gezeigt, wo die Stärken und Schwächen der beiden Verfahren sind. Dies ermöglicht eine bessere Einordnung der impulsbasierten Dynamiksimulation und zeigt, dass es Szenarien gibt, in denen sie der LFM vorzuziehen ist. Der niedrige Implementierungsaufwand ermöglicht es, schnell komplexe Simulationen mit jeder Art von Bedingungen durchzuführen.

Optisch störende und physikalisch unplausible Phänomene wie Einschwingvorgänge und numerischer Drift können nicht auftreten. Die schwierige Wahl der Stabilisierungsparameter entfällt. Als einzige Parameter müssen die Toleranzen und die maximale Anzahl an Iterationen gewählt werden. Diese Werte lassen sich intuitiv bestimmen, da sie direkt interpretierbar sind.

Die Laufzeitmessungen haben ergeben, dass die Laufzeit der iterativen impulsbasierten Methode vor allem in Abhängigkeit zur Problemgröße hoch ist. Die zunehmende Anzahl von Abhängigkeiten der Körper untereinander führt dazu, dass mehr Iterationen benötigt werden. Allerdings lässt sich die Berechnung jederzeit mit einer Näherungslösung unterbrechen. Das Verfahren konvergiert dann über mehrere Zeitschritte zum gültigen Zustand.

Wie erwartet hat die Baraff-Methode im Vergleich zur klassischen LFM ein lineares Laufzeitverhalten gezeigt. Dennoch ist das iterative Verfahren bei einer Fehlertoleranz von 10^{-3} schneller. Die Laufzeit der impulsbasierten LGS-Verfahren steigt zwar nicht linear aber dennoch konnte der Baum mit 255 Gelenken noch schneller berechnet werden als mit der Baraff-Methode.

Das lineare Verfahren hat wie erwartet ein Laufzeitverhalten von $O(n)$ gezeigt und ist das schnellste gemessene Verfahren. Mit dieser Methode konnte selbst der Baum mit 255 Gelenken in Echtzeit berechnet werden und es ist annähernd sechs mal so schnell wie die Baraff-Methode.

6 Literatur

- [AsQiRei1994] Ascher, U. M., Chin, H., Reich, S.: Stabilization of DAEs and invariant manifolds. *Numerische Mathematik*, 67, S. 131-149.
- [Bar1994] Baraff, D.: Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. *SIGGRAPH '94: Proc. of the 21th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, S. 23–34, New York (USA), 1994.
- [Bar1996] Baraff, D.: Linear-time dynamics using Lagrange multipliers. *SIGGRAPH '96: Proc. of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, S. 137–146, New York (USA), 1996.
- [BarWit2001] Baraff, D., Witkin, A.: *Physically Based Modeling*. SIGGRAPH 2001: Course Notes, 2001
- [BarzBarr1988] Barzel, R., Barr, A. H.: A modeling system based on dynamic constraints. *SIGGRAPH '88: Proc. of the 15th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, S. 179–188, New York (USA), 1988.
- [Baum1972] Baumgarte, J.: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, S. 1–16, 1972.
- [Be2007] Bender, J.: Impulse-based dynamic simulation in linear time. *Computer Animation and Virtual Worlds* 18 (4-5), S. 225-233, 2007.
- [BeBaSchm2003] Bender, J., Baas, M., Schmitt, A. A.: Ein neues Verfahren für die mechanische Simulation in VR Systemen und in der Robotik. *ASIM '03: Symposium Simulationstechnik*, S. 111-116, 2003.
- [BeFiSchm2005] Bender, J., Finkenzeller, D., Schmitt, A. A.: An impulse-based dynamic simulation system for VR applications. *Proceedings of Virtual Concept 2005*, Biarritz (France), 2005.
- [BeSchm2006a] Bender, J., Schmitt, A. A.: Constraint-based collision and contact handling using impulses. *Proc. of the 19th international conference on computer animation and social*, S. 3-11, Geneva (Switzerland), 2006.
- [BeSchm2006b] Bender, J., Schmitt, A. A.: Fast Dynamic Simulation of Multi-Body Systems Using Impulses. *VRIPHYS '06: Third Workshop in Virtual*

Reality Interactions and Physical Simulations, S. 81-90, Madrid (Spain), 2006.

- [BreCamPetz1989] Brenan, K. E., Campbell, S. L., Petzold, L. R.: Classics in Applied Mathematics 14: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.
- [Glei1994] Gleicher, M.: A Differential Approach to Graphical Interaction. Technical Report CMU-CS-94-217, 1994.
- [PreTeVetFla1992] Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B.: Numerical Recipes in C. 2te Auflage, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Schm2003] Schmitt, A. A.: Dynamische Simulation von gelenkgekoppelten Starrkörpersystemen mit der Impulstechnik. Internal Report 19, Institut für Betriebs- und Dialogsysteme, Universität Karlsruhe, 2003.
- [SchmBe2005] Schmitt, A. A., Bender J.: Impulse-Based Dynamic Simulation of Multibody Systems: Numerical Comparison with Standard Methods. Proc. Automation of Discrete Production Engineering, S. 324–329, Sozopol (Bulgaria), 2005.
- [SchmBePrau2005] Schmitt, A. A., Bender J., Prautzsch, H.: On the Convergence and Correctness of Impulse-Based Dynamic Simulation. Internal Report 17, Institut für Betriebs- und Dialogsysteme, Universität Karlsruhe, 2005.
- [Wag2001] Wagner, F.: Konzepte und Methoden zu allgemeinen, physikalisch basierten Animationssystemen auf der Grundlage der Lagrange-Faktoren-Methode. Dissertation, Universität Rostock, Informatik, Rostock, 2001.